

Krzysztof Piontek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

## MODELOWANIE FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH Z WARUNKOWĄ WARIANCJĄ

### 1. Wstęp

Spośród wielu rodzajów ryzyka<sup>1</sup>, szczególną uwagę zwrócono na ryzyko rynkowe<sup>2</sup> (związane ze zmianami kursów akcji, indeksów, towarów, walut, instrumentów pochodnych i stóp procentowych) oraz ryzyko kredytowe (związane z możliwością niewywiązania się jednej ze stron z kontraktu). Jedną z grup pomiaru ryzyka rynkowego miary stanowią miary zmienności cen instrumentów finansowych (*volatility measures*).

U podstaw rozważań o zmienności instrumentów finansowych znajduje się dyskusja o dynamicznych modelach opisujących zmianę ceny instrumentu finansowego. Ceny lub stopy zwrotu opisuje się jako procesy stochastyczne o czasie dyskretnym lub ciągłym.

Standardowe modele zakładają, że procesem kształtującym zmiany cen instrumentów bazowych jest geometryczny proces Browna ze stałymi parametrami dryftu oraz zmienności. Model ten zakłada że rozkład stop zwrotu jest rozkładem normalnym.

Jednak badania empiryczne stóp zwrotu wykazały występowanie na rynkach finansowych: efektu skupiania danych, grubych ogonów rozkładów, skośności rozkładu, długoterminowej zależności danych, niestałości wariancji stóp zwrotu w czasie. Niezbędne stało się więc poszukiwanie modeli lepiej opisujących rynek. W niniejszej pracy przedstawione zostały podstawowe modele klasy (G)ARCH zapoczątkowane przez Engla (1982) oraz Bollersleva (1986) oraz ich właściwości. Procesy

---

<sup>1</sup> K. Jajuga, Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym

<sup>2</sup> K. Jajuga, Miary ryzyka rynkowego - cz.1, Rynek Terminowy, listopad 1999

te uwzględniają zmienną wariancję stóp zwrotu. Zaprezentowane zostały metody szacowania parametrów modeli.

W dalszej części pracy przedstawione zostało oszacowanie podstawowego dla rynków finansowych modelu GARCH(1,1) dla danych polskich oraz omówienie jego właściwości.

Przedstawione zagrożenia mogą zostać wykorzystane w zarządzaniu:

- ryzykiem kursu walutowego (*exchange rate risk*);
- ryzykiem cen akcji (*stock price risk*);
- ryzykiem cen towarów (*commodity price risk*).

Z opracowania wyłączone zostało ryzyko stopy procentowej (*interest rate risk*), co związane jest z odmiennymi narzędziami stosowanymi w analizie zmienności oraz struktury stóp procentowych (obiektem badania jest wówczas cała krzywa dochodowości papierów dłużnych).

## 2. Empiryczne własności rozkładów stóp zwrotów

Badania empiryczne stóp zwrotu<sup>345</sup> w dłuższym okresie wykazały, występowanie na rynkach finansowych: **efektu skupiania danych** (po okresie dużej zmienności, następują okresy charakteryzujące się mniejszą zmiennością), **grubych ogonów rozkładów** (prawdopodobieństwo pojawienia się bardzo dużych lub bardzo małych wartości jest większe niż w przypadku rozkładu normalnego), **skośności rozkładu** (rozkład stóp zwrotu nie jest symetryczny względem średniej, co tłumaczy się odmiennym zachowaniem inwestorów w czasie bessy i hossy), **długoterminowej zależności danych** (po znacznych wzrostach następują dalsze wzrosty, po których nadchodzą nagłe spadki a po nich kolejne), **efektu dźwigni** (wariancja procesu zależy od wcześniejszych stóp zwrotu, wraz ze spadkiem ceny instrumentu występuje tendencja do wzrostu wariancji stóp zwrotu).

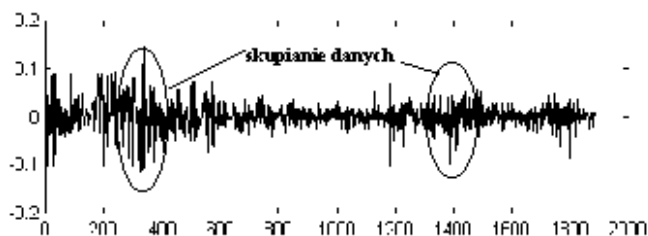
Rys. 1. przedstawia wykres dziennych stóp zwrotu z indeksu WIG od początku notowań w kwietniu 1991 do października 2000 roku. Wyraźnie można zaobserwować efekt skupiania danych oraz zmienność wariancji w czasie.

---

<sup>3</sup> E. Fama, The behaviour of stock market prices, Journal of Business, 38, 1965

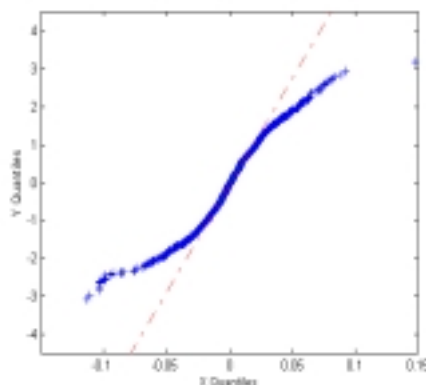
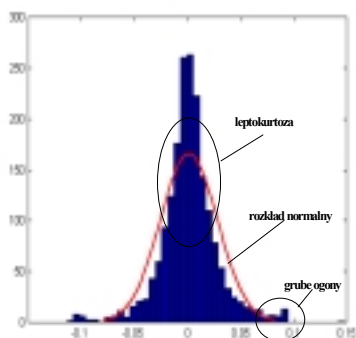
<sup>4</sup> Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, pod red. K. Jajugi, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław, 2000,

<sup>5</sup> Weron A., Weron R. (1998). Inżynieria finansowa. WNT. Warszawa



Rys. 1. Dzielne stopy zwrotu indeksu WIG.

Efekt grubych ogonów oraz duzo większej kurtozy niż dla rozkładu normalnego przedstawiają odpowiednio rysunki 2 oraz 3.



Rys. 2. Histogram stop zwrotu

Rys. 3. QQ-plot dziennych stóp zwrotu

Zaobserwowane efekty zmiennej wariancji w czasie oraz grubych ogonów rozkładów legły u podstaw wprowadzenia modeli z warunkową wariancją.

### 3. Modele zmienności instrumentów finansowych

Dokonanie podziału modeli zmienności instrumentów finansowych nie jest łatwe. Ogólnie można podzielić modele szeregów czasowych na<sup>6</sup>:

- modele ze stałym parametrem zmienności,
- modele ze zmiennym parametrem zmienności.

<sup>6</sup> P. Abken, S. Nandi, Options and Volatility, Economic Review, grudzień 1996

Do pierwszej grupy modeli zaliczymy przede wszystkim najbardziej popularny model zmian cen instrumentów finansowych - model geometrycznego ruchu Browna.<sup>7</sup>

Innymi modelami ze stałym parametrem zmienności są np.<sup>8</sup>:

- model Ornsteina-Uhlenbecka,
- model skoku i dyfuzji (jump-diffusion process),
- model Coxa-Rossa-Rubinsteina<sup>9</sup>

Ponieważ modele te w sposób niewystarczający modelowały rzeczywiste szeregi stóp zwrotu, zaproponowano szereg klas modeli ze zmiennym współczynnikiem zmienności. Ogólnie modele te dzieli się na:

- modele deterministyczne, w których zakłada się, że możliwe jest jednoznaczne oszacowanie parametru zmienności dla poszczególnych okresów na podstawie informacji dostępnych w przeszłych okresach. Zbiór niezbędnych informacji może zawierać zarówno informacje o cenach instrumentów bazowych, jak i pochodnych. Najbardziej znanymi modelami tej klasy są<sup>10</sup>:
  - a) constant elasticity of variance model (CEV),
  - b) implied binomial trees model,
  - c) autoregressive conditional heteroskedasticity models (ARCH),
  - d) exponentially weighted moments models,
- modele stochastyczne, w których zakłada się, że przyszły poziom zmienności nie może być dokładnie oszacowany na podstawie informacji dostępnych w dniu dzisiejszym. W modelach tych zmienność zmienia się w sposób losowy, a źródło tej losowości jest inne niż źródło zmian poziomu cen, choć te dwa procesy zakłóceń mogą być skorelowane.

W niniejszej pracy rozważane są jedynie modele klasy ARCH wraz z późniejszymi modyfikacjami.

#### 4. Modele procesów klasy (G)ARCH

Od wprowadzenia w 1982 roku przez R. Engla podstawowego modelu klasy ARCH<sup>11</sup>, powstało wiele kolejnych modyfikacji mających na celu jeszcze lepsze modelowanie własności finansowych szeregów finansowych.

---

<sup>7</sup> P. Wilmott, Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering, Wiley, 1999,

<sup>8</sup> K. Jajuga, Modele dynamiczne w analizie instrumentów finansowych, Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Toruń, wrzesień 1999

<sup>9</sup> J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics, 7, 1979,

<sup>10</sup> P. Abken, S. Nandi, Options and Volatility, Economic Review, grudzień 1996

<sup>11</sup> R. Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation, Econometrica, 50, 1982

Historycznie pierwszym modelem uwzględniającym zależność warunkowej wariancji procesu od jego poprzednich wartości jest model ARCH(q) dany następującymi równaniami:

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon \sim N(0,1), \quad (3)$$

gdzie:

$r_t$  - stopy zwrotu z danego instrumentu finansowego,

$h_t$  - warunkowa chwilowa wariancja szeregu finansowego,

$\varepsilon$  - szum o jednostkowym rozkładzie normalnym.

Okazało się jednak, że do poprawnego modelowania rzeczywistych szeregów finansowych niezbędne jest rozpatrywanie modeli ARCH wysokiego rzędu, co oznacza potrzebę estymacji dużej liczby parametrów modelu. Rozwiązaniem okazał się uogólniony model ARCH (GARCH) zaproponowany przez T. Bollersleva<sup>12</sup> w 1986r., w którym warunkowa wariancja  $h_t$  zależy nie tylko od poprzednich stóp zwrotu, lecz również od poprzednich wariancji warunkowych.

Warunkowa wariancja procesu GARCH(p,q) dana jest następującym wzorem:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (4)$$

W powyższych modelach nie mamy możliwości modelowania efektu dźwigni, gdyż warunkowa wariancja zależy jedynie od wartości bezwzględnych wcześniejszych realizacji, a nie uwzględnia znaków. Odpowiednie modyfikacje zaproponowane zostały przez Nelsona<sup>13</sup> (1991), jako model EGARCH (exponential GARCH):

$$\ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left[ \varphi \frac{r_{t-i}}{h_{t-i}} + \gamma \left( \left| \frac{r_{t-i}}{h_{t-i}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} \quad (5)$$

<sup>12</sup> T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, 1986

<sup>13</sup> D. Nelson, Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, Econometrica, 59, 1991

oraz przez Zakoiana<sup>14</sup>, jako model TARARCH (threshold ARCH):

$$r_t = \begin{cases} \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i} + \varepsilon_t; & r_{t-d} \geq T \\ \omega' + \sum_{i=1}^{p'} \alpha'_i r_{t-i} + \varepsilon_t; & r_{t-d} < T \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

d- parametr odroczenia,

T - parametr progowy.

Obydwa te modele umożliwiają modelowanie efektu asymetrii informacji, czyli odmiennego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na warunkową wariancję, a co za tym idzie na możliwość modelowania skośności rozkładów.

Dynamiczny rozwój modeli z warunkową wariancją doprowadził do powstania kilkudziesięciu modeli w ramach tej klasy. Przykładowe modele to<sup>15</sup>:

Nonlinear ARCH Model (Engle, Bollerslev, 1986)  $h_t = \omega + \alpha |\varepsilon_{t-1}|^\gamma$  (7)

Multiplicative ARCH Model (Gewke, 1986)  $\log(h_t) = \omega + \alpha_i \log(\varepsilon_{t-1}^2)$  (8)

Autoregressive Standard Deviation Model (Schwert, 1990)  $h_t = \left[ \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| \right]^2$  (9)

Quadratic ARCH Model (Sentana, 1995)  $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}$  (10)

ARCH-in-Mean Model (Engle, Lilien, Robins, 1987)  $r_t = \lambda h_t + \varepsilon_t$   
 $h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$  (11)

Najczęstszymi technikami estymacji parametrów procesów pozostają:

- metoda największej wiarygodności,
- metoda wnioskowania bayesowskiego,
- metoda momentów (generalised method of moments - GMM),
- QMLE (quasi maximum likelihood estimation).

<sup>14</sup> J. Knight, S. Satchell, Forecasting volatility in the financial markets, Butterworth-Heinemann, 1998

<sup>15</sup> R. Engle, V. Ng, Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, The Journal of Finance, 5, 1993

Różne techniki estymacji parametrów modeli oraz warunki na stacjonarność procesów opisane są szczegółowo w literaturze przedmiotu.<sup>16</sup>

## 5. Przykład empiryczny

Poniżej zaprezentowany został przykład estymacji najpopularniejszego modelu warunkowej wariancji dla szeregów finansowych - modelu GARCH(1,1) - dla indeksu WIG. Popularność modelu wynika przede wszystkim z jego prostoty (trzy parametry w równaniu wariancji), co jednak nie przeszkadza w osiągnięciu zadowalających rezultatów. Estymacja wyższych modeli jest często niemożliwa ze względu na dysponowanie zbyt krótkimi szeregami finansowymi, co powoduje że wyestymowane parametry obciążone są zbyt dużymi błędami. Z taką też sytuacją mamy do czynienia w warunkach polskich.

Rozpatrywany model zdefiniowany jest poprzez następujące równania:

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (12)$$

$$h_t = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (13)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (14)$$

Zakłada się więc następujący rozkład warunkowy stóp zwrotu:

$$r_t | \Psi_{t-1} \sim N(\mu, h_t) \quad (15)$$

gdzie:

$\mu$  - średnia stopa zwrotu dla rozpatrywanego okresu,

$\Psi_{t-1}$  - informacja dostępna do chwili t-1 włącznie.

Stacjonarność procesu GARCH(1,1) w szerszym sensie zapewnia spełnienie warunku  $\alpha + \beta < 1$ .

Proces GARCH charakteryzuje się powracaniem do średniej. Średnia długoterminowa wariancja procesu dana jest równaniem:

$$V = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (16)$$

Estymację wektora parametrów  $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$  przeprowadzono metodą największej wiarygodności w procesie poszukiwania maksimum funkcji<sup>17</sup>:

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \ln h_t(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{r_t^2}{h_t(\theta)} \quad (17)$$

<sup>16</sup> Volatility. New Techniques for pricing derivatives. Pod redakcją Roberta Jarro-wa. (1998). Risk books.

<sup>17</sup> CH. Hafner, Nonlinear Time Series Analysis with Applications to Foreign Exchange Rate Volatility, Physica-Verlag, 1998

Dla dziennych stop zwrotu z indeksu WIG (dane od 03.01.1994 do 03.10.2000) uzyskano następujące oszacowanie modelu GARCH(1,1):

$$r_t = 0,000143 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = 0,0000226 + 0,2142\varepsilon_{t-1}^2 + 0,7464h_{t-1}.$$

Uzyskany model jest stacjonarny w szerszym sensie, gdyż:

$$\alpha + \beta = 0,9606 < 1.$$

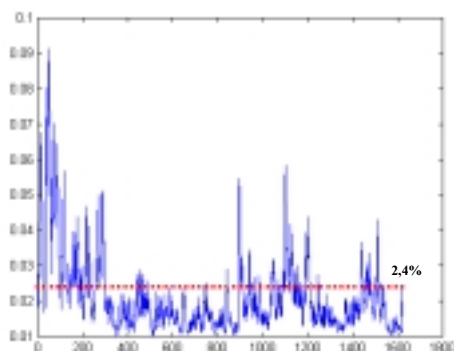
Długoterminowa dzienna wariancja procesu wynosi:

$$V = \frac{0,0000226}{1 - 0,2142 + 0,7464} = 0,0005739,$$

więcienne (chwilowe) odchylenie standardowe stóp zwrotu (średnia dzienna zmienność) dla okresu sześcioletniego wynosiła:

$$\sqrt{V} = 0,023956 \approx 2,4\%$$

Rys.. 4. przedstawia dzienna zmienność indeksu WIG wraz z naniesionym poziomem średniej.



Rys. 4. Dzienna zmienność indeksu WIG

Jedną z najprostszych technik sprawdzenia poprawności dopasowania modelu do danych empirycznych jest analiza szeregu:

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad (18)$$

gdzie:

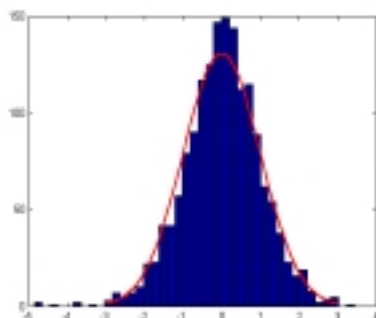
$\hat{\mu}, \hat{h}_t$  - wyestymowane charakterystyki procesu.

W przypadku idealnego dopasowania powinna zachodzić własność:

$$\hat{\varepsilon}_t \sim N(0,1). \quad (19)$$



Rys. 5 oraz Tabela 1. przedstawiają informacje o rozkładzie  $\hat{\varepsilon}_t$ .



Rys. 5. Rozkład  $\hat{\varepsilon}_t$

Tabela 1.

Średnia	0,002938253
Mediana	0,02793821
Odchylenie std	1,000651182
Wariancja	1,001302789
Kurtoza	1,109065148
Skośność	-0,279463375

Źródło: obliczenia własne.

Rozkład warunkowy  $\hat{\varepsilon}_t$  posiada większą kurtozę niż rozkład normalny oraz skośność różną od zera, co świadczy o braku idealnego dopasowania modelu do danych empirycznych.

Z tego powodu zaproponowano zastosowanie rozkładów warunkowych odmiennych od rozkładu normalnego. Najczęściej rozpatrywaną modyfikacją stał się model t-GARCH o warunkowym rozkładzie t-Studenta<sup>18</sup> dany wzorami:

$$r_t - \mu = \rho(r_{t-1} - \mu) + \xi_t \quad (20)$$

$$h_t = \omega + \alpha \xi_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (21)$$

gdzie:

$\xi_t$  - zmienna o warunkowym skośnym rozkładzie t-Studenta o  $v > 2$  stopniach swobody, zerowej modalnej, parametrze asymetrii  $\gamma > 0$  oraz zmiennej precyzji  $h_t^{-1}$ .

## 6. Podsumowanie

Mimo braku idealnego dopasowanie klasycznego modelu GARCH(1,1) do danych empirycznych, i tak opisuje on lepiej rzeczywistość niż modele zakładające stałość wariancji procesu w czasie. Łatwość szacowania modelu spowodowała, że znalazł on zastosowanie w pomiarze ryzyka metodą *Value at Risk*<sup>19 20</sup> oraz (w mniejszym już stopniu) w modelach wyceny opcji<sup>21</sup>.

<sup>18</sup> J. Osiewalski, M. Pipień, Bayesowski wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH(1,1), Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Toruń, 1999

<sup>19</sup> P. Best, Wartość narażona na ryzyko, Oficyna Ekonomiczna, Kraków, 2000

Dalsze prace nad modelami z warunkową wariancją niewątpliwie doprowadzą do częstszego stosowania tych modeli w teorii finansów.

### Literatura:

- [1] P. Abken, S. Nandi, Options and Volatility, *Economic Review*, grudzień 1996
- [2] P. Best, Wartość narażona na ryzyko, *Oficyna Ekonomiczna*, Kraków, 2000
- [3] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 1986
- [4] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 1979,
- [5] R. Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation, *Econometrica*, 50, 1982
- [6] R. Engle, V. Ng, Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *The Journal of Finance*, 5, 1993
- [7] E. Fama, The behaviour of stock market prices, *Journal of Business*, 38, 1965
- [8] J. Hull (1997). *Futures, options, and other derivatives*. Prentice-Hall, New York.
- [9] K. Jajuga, Miary ryzyka rynkowego - cz.1, *Rynek Terminowy*, listopad 1999
- [10] K. Jajuga, Modele dynamiczne w analizie instrumentów finansowych, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń, wrzesień 1999
- [11] K. Jajuga, Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym
- [12] Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, pod red. K. Jajugi, *Wydawnictwo AE we Wrocławiu*, Wrocław, 2000,
- [13] J. Knight, S. Satchell, *Forecasting volatility in the financial markets*, Butterworth-Heinemann, 1998
- [14] M. Łach, A. Weron, Skuteczność wybranych metod obliczania VaR dla danych finansowych z polskiego rynku, *Rynek Terminowy*, lipiec 2000
- [15] D. Nelson, Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrica*, 59, 1991
- [16] J. Osiewalski, M. Pipień, Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH(1,1), *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń, 1999
- [17] Weron A., Weron R. (1998). *Inżynieria finansowa*. WNT. Warszawa
- [18] P. Wilmott, *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*, Wiley, 1999,

---

<sup>20</sup> M. Łach, A. Weron, Skuteczność wybranych metod obliczania VaR dla danych finansowych z polskiego rynku, *Rynek Terminowy*, lipiec 2000

<sup>21</sup> P. Wilmott, *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*, Wiley, 1999,