

Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z "grubymi ogonami"

WSTĘP

Spośród wielu rodzajów ryzyka analizowanych na rynkach finansowych [7], szczególną uwagę zwrócono na ryzyko rynkowe związane ze zmianami cen akcji, walut, towarów, instrumentów zależnych od stop procentowych oraz instrumentów pochodnych. Jedną z grup metod pomiaru ryzyka rynkowego stanowią, zdobywające coraz większą popularność, miary zagrożenia (*downside risk measures*) [8], z których najpopularniejszą (choć nie pozbawioną pewnych wad) miarą pozostaje *Value at Risk (VaR)*¹. U podstaw rozważań o miarach zagrożenia znajduje się dyskusja o rozkładach cen lub stóp zwrotu oraz o dynamicznych modelach opisujących zmiany cen, bądź stóp zwrotu analizowanych instrumentów.

Standardowe (najprostsze) modele zakładają, że procesem kształtującym zmiany cen akcji, walut i towarów² jest geometryczny proces Browna ze stałymi w czasie parametrami dryfu (trendu) i zmienności. Model ten zakłada, że rozkład stóp zwrotu jest rozkładem normalnym, a poszczególne stopy zwrotu pochodzą z rozkładów identycznych i niezależnych. Własność ta nie potwierdza się empirycznie. W wielu pracach [4,2,14,12] przedstawiono badania empiryczne dla różnych finansowych szeregów czasowych. Badania te wykazały występowanie na rynkach finansowych:

- efektu skupiania (gromadzenia) zmienności (*volatility clustering*), co oznacza, że zarówno małe, jak i duże zmiany kursu następują seriami,
- niestałości zmienności w czasie,
- efektu leptokurtozy i grubych ogonów rozkładów stóp zwrotu, co oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia dużych, nietypowych zmian kursu (duże co do wartości bezwzględnej stopy zwrotu) jest większe niż gdyby stopy zwrotu pochodziły z rozkładu normalnego,
- efektu autokorelacji stóp zwrotu, szczególnie w okresach o małej zmienności,
- skośności rozkładów stóp zwrotu (najczęściej obserwuje się rozkłady prawostronnie skośne, lecz nie jest to regułą),
- efektu ujemnego skorelowania poziomu kursów i poziomu zmienności cen (efekt dźwigni).

¹ W literaturze polskiej spotyka się tłumaczenia „wartość zagrożona”, „wartość narażona na ryzyko”. W dalszej części pracy posługiwac się będziemy najlepiej utrwalonym zarówno pośród praktyków, jak i naukowców skrótem *VaR*.

² Są to najprostsze instrumenty bazowe, na które wystawia się opcje. Popularność geometrycznego ruchu Browna związana jest wprost z najpopularniejszym modelem wyceny opcji wprowadzonym przez Blacka i Scholesa, u którego podstaw znajduje się właśnie założenie, że ceny instrumentu bazowego zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna.

Są to jedynie podstawowe efekty zaobserwowane w szeregach stóp zwrotu i zmienności instrumentów finansowych. Oprócz tych, można by też wyróżnić np. efekt długoterminowej zależności stóp zwrotu, efekt korelacji pomiędzy stopami zwrotu różnych instrumentów lub wręcz różnych segmentów rynku, bądź rynków (*volatilities co-movement*) oraz całą gamę tzw. efektów kalendarzowych związanych z odmiennymi rozkładami stóp zwrotu dla niektórych dni tygodnia lub dla niektórych miesięcy.

Niezbędne stało się więc poszukiwanie modeli lepiej opisujących zachowanie się szeregów cen i stóp zwrotu (uwzględniających przynajmniej niektóre z wymienionych powyżej efektów), które można by wykorzystać w wyznaczaniu miary *VaR*.

W niniejszej pracy, jako potencjalne modele umożliwiające opis kształtowania się stóp zwrotu, przyjęte zostały modele AR(1)-GARCH(1,1) ze składnikiem losowym, którego warunkowy rozkład jest rozkładem normalnym, symetrycznym rozkładem t-Studenta lub rozkładem GED (*General Error Distribution*). Procesy te umożliwiają modelowanie szeregów z autokorelacją, leptokurtozą rozkładów stóp zwrotu oraz z efektem gromadzenia zmienności.

Dokonano weryfikacji przydatności poszczególnych modeli do opisu dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG (stopy zwrotu z okresu 16.04.1991-16.05.2002, 2315 obserwacji), indeksu SP500 (stopy zwrotu z okresu 05.01.1970 – 15.05.2002, 8172 obserwacje) oraz indeksu DJIA (stopy zwrotu z okresu 23.08.1962 – 20.05.2002, 10000 obserwacji).

1. Analizowane modele szeregów stop zwrotu

Jak już zostało zasygnalizowane, rozważania o pomiarze ryzyka rynkowego metodą *VaR* rozpocząć należy od wyboru (i uzasadnienia) modeli dynamiki stop zwrotu. Od wyboru modelu stóp zwrotu zależy późniejszy pomiar wartości *VaR*.

Ograniczenie się do klasy modeli AR(1)-GARCH(1,1) [4,2] podyktowane zostało wcześniejszymi badaniami przeprowadzonymi dla indeksu WIG [12] oraz faktem, że w większości przypadków analizowanych w literaturze przedmiotu wybór rzędu procesu autoregresji na poziomie AR(1) oraz procesu GARCH na poziomie GARCH(1,1) jest wystarczający dla uchwycenia efektu autoregresji oraz heteroskedastyczności.

Poniżej na rys. 1 i rys. 2 przedstawione zostały (w ramach uzasadnienia wyboru modelu) autokorelacje szeregu stóp zwrotu dla indeksu WIG oraz autokorelacje kwadratów stóp zwrotu. Obserwujemy znaczącą autokorelację rzędu pierwszego oraz znaczące autokorelacje kwadratów stóp zwrotu, co jest uzasadnieniem wykorzystania modelu umożliwiającego modelowanie zmiennej w czasie wariancji procesu (modelu GARCH).

Dokładniejszą weryfikację hipotez o występowanie efektu autokorelacji stop zwrotu oraz o występowaniu efektu GARCH dla indeksu WIG przedstawiono w pracy [12].

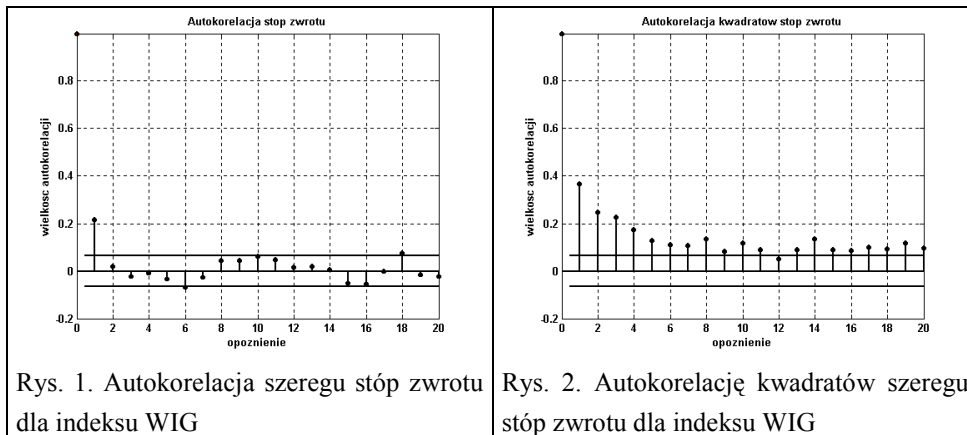
Do testowania efektu autoregresji wykorzystano test istotności współczynnika autokorelacji [13], istotność pozostałych autokorelacji wyższych rzędów zbadano testem Q Ljung-Boxa-Pierce'a [3]³. Współczynnik autokorelacji rzędu pierwszego okazał się istotny, natomiast w

³ W wielu przypadkach proste testy istotności autokorelacji zawodzą wobec współwystępowania efektu heteroskedastyczności w analizowanym szeregu. Odpowiedni test autoregresji przy współwystępowaniu heteroskedastyczności zaproponowany został w pracy [6]

stosunku do autokorelacji wyższych rzędów brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o nieistotności obserwowanych autokorelacji.

Występowanie efektu heteroskedastyczności zbadano przy pomocy testu zaproponowanego przez Engle'a [4]. Uzyskana statystyka testowa pozwala odrzucić hipotezę zerową o braku heteroskedastyczności w analizowanym szeregu.

Powyższe fakty zadecydowały o przyjęciu do dalszych analiz modeli klasy AR(1)-GARCH(1,1). Rząd modelu GARCH ograniczony został do modelu GARCH(1,1) także z powodu tego, że błędy estymacji są zbyt duże dla krótkich szeregów czasowych (takich jak WIG).



Rys. 1. Autokorelacja szeregu stóp zwrotu dla indeksu WIG

Rys. 2. Autokorelację kwadratów szeregu stóp zwrotu dla indeksu WIG

Źródło – [12].

Modele teoretyczne

W dalszej części pracy rozpatrywane będą modele AR(1)-GARCH(1,1) stóp zwrotu dane następującymi wzorami:

$$r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad (2)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (3)$$

$$\eta_t \sim IID(0,1) \quad (4)$$

gdzie:

- r_t to logarytmiczna stop zwrotu wyznaczana na podstawie ceny w momencie t (P_t) oraz ceny w momencie $t-1$ (P_{t-1}) przy pomocy wzoru:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (5)$$

- η_t to składnik losowy pochodzący z rozkładu o zerowej średniej i jednostkowej wariancji.
- μ , φ , ω , α , β - to parametry modelu.

Tak zdefiniowany model zakłada, że warunkowa wartość oczekiwana stop zwrotu wynosi:

$$m_t = \mu + \varphi r_{t-1} \quad (6)$$

a warunkowa wariancja h_t zadana jest równaniem (3).

Na podstawie prostego przekształcenia wzoru (2) uzyskujemy:

$$\eta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (7)$$

W podstawowej wersji zaproponowanej przez Engle'a i Bollersleva modele heteroskedastyczne cechowały się warunkowym normalnym rozkładem składnika losowego. Okazało się jednak, że rzeczywiste reszty modelu posiadają warunkowy rozkład o grubszych ogonach niż rozkład normalny. Zaproponowano więc szereg innowacji w tym zakresie.

W niniejszej pracy analizie poddano 3 możliwe rozkłady zmiennej η_t dane poniższymi wzorami:

- rozkład normalny - $N(\theta, I)$:

$$f_N(\varepsilon_t, h_t; \theta_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right\} \quad (8)$$

- rozkład t-Studenta - $t-St(\theta, I, \nu)$

$$f_S(\varepsilon_t, h_t; \theta_S) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) h_t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(\nu-2)h_t}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (9)$$

- rozkład GED - $GED(\theta, I, \nu)$

$$f_G(\varepsilon_t, h_t; \theta_G) = \frac{\nu \exp\left\{-\frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t}{\lambda h_t^{1/2}} \right|^\nu\right\}}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) h_t^{1/2}} 2^{\frac{\nu+1}{\nu}} \quad (10)$$

gdzie:

$$\lambda = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} 2^{\frac{2}{\nu}} \right]^{1/2} \quad (11)$$

θ - wektor parametrów modelu (dla rozkładów GED i t-Studenta liczba stopni swobody jest również parametrem modelu),

λ - parametr zapewniający jednostkową wariancję,

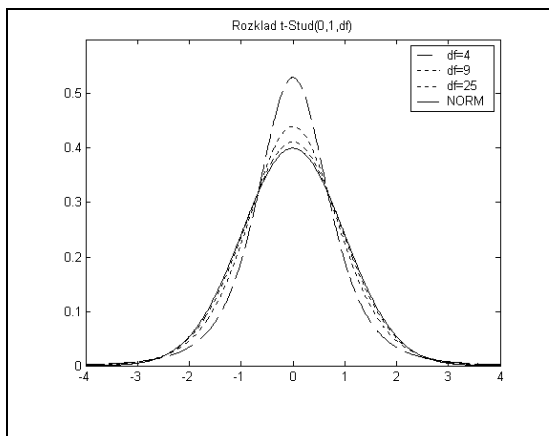
ν - ilość stopni swobody w rozkładzie t-Studenta i rozkładzie GED,

$\Gamma(z)$ - funkcja gamma dla parametru z ; $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$.

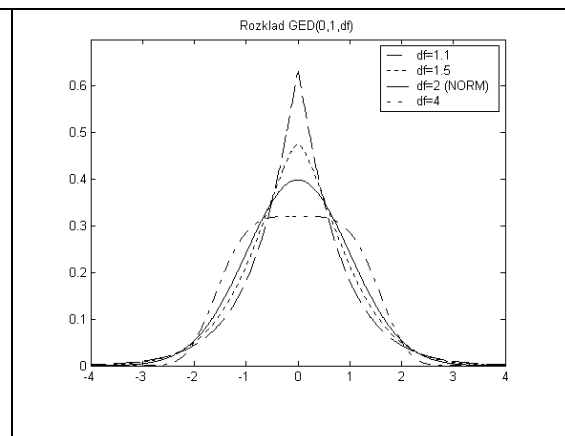
Należy wyraźnie podkreślić, że powyższe rozkłady cechują się zerową średnią i jednostkową wariancją.

Rozkład t-Studenta oraz rozkład GED są rozkładami, dla których w zależności od przyjętej liczby stopni swobody możliwe jest uzyskanie rozkładów o grubszych ogonach niż rozkład normalny.

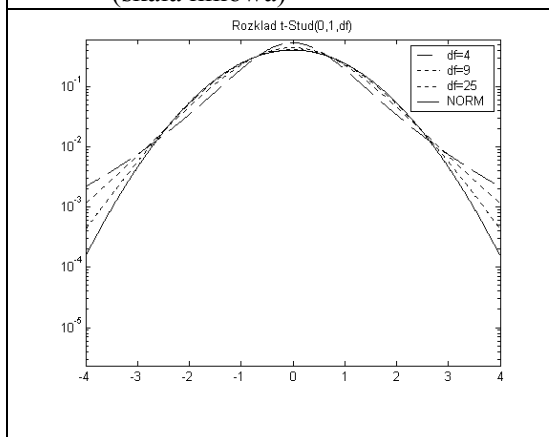
Przykładowe funkcje gęstości rozkładu $t\text{-St}(0,1,\nu)$ oraz rozkładu $GED(0,1,\nu)$ w skali liniowej i logarytmicznej prezentują rys. 3-6.



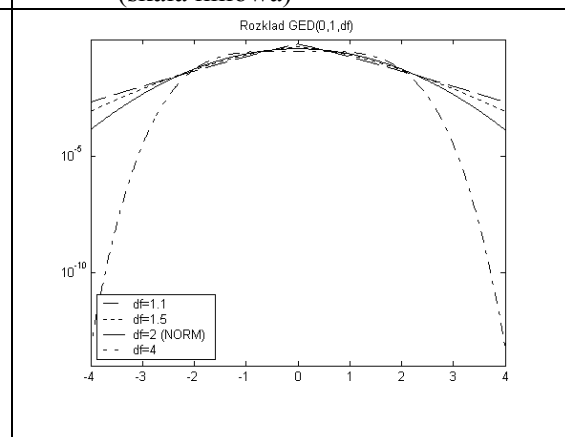
Rys. 3. Przykładowe rozkłady $t\text{-St}(0,1,df)$ (skala liniowa)



Rys. 5. Przykładowe rozkłady $GED(0,1,df)$ (skala liniowa)



Rys. 4. Przykładowe rozkłady $t\text{-St}(0,1,df)$ (skala logarytmiczna)



Rys. 6. Przykładowe rozkłady $GED(0,1,df)$ (skala logarytmiczna)

Rozkład normalny jest szczególnym przypadkiem zarówno rozkładu t-Studenta (dla nieskończonej liczby stopni swobody), jak i rozkładu GED (dla 2 stopni swobody).

Estymacji parametrów modeli dokonuje się najczęściej metodą największej wiarygodności. Sprowadza się to do takiego wyboru wektora parametrów θ , aby dla danego szeregu stóp zwrotu zmaksymalizować odpowiednią funkcję:

- dla rozkładu normalnego:

$$LLF_N(\hat{\theta}_N; \varepsilon_t, h_t) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \quad (12)$$

- dla rozkładu t-Studenta:

$$LLF_S(\hat{\theta}_S; \varepsilon_t, h_t) = -\frac{n}{2} \ln(\pi(v-2)) + n \ln\left(\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right) - n \ln\left(\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right) - \dots \quad (13)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(h_t) - \sum_{t=1}^n \left(\frac{v+1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(v-2)h_t}\right)$$

- dla rozkładu GED:

$$LLF_G(\hat{\theta}_G; \varepsilon_t, h_t) = \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{v}{\lambda}\right) - n \ln \Gamma\left(\frac{1}{v}\right) - n \left(\frac{v+1}{v}\right) \ln(2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left|\frac{\varepsilon_t}{\lambda h_t^{1/2}}\right|^v \quad (14)$$

gdzie:

n – długość szeregu stóp zwrotu, dla którego dokonujemy estymacji

Przykład empiryczny

Poniżej przedstawiono przykładowo wyestymowane parametry modeli dla 5000 dziennych stop zwrotu z indeksu DJIA z okresu 29.07.1982 – 20.05.2002. W nawiasach podano statystyki t dla wyestymowanych parametrów.

parametr	N(0,1)	t-St(0,1,v)	GED(0,1,v)
μ	0,0006712 (4,95)	0,0006402 (5,77)	0,0006266 (4,51)
φ	0,03311 (2,20)	0,01281 (0,94)	0,006649 (0,40)
ω	1,8752e-6 (2,32)	9,2544e-7 (3,30)	1,13e-6 (2,96)
α	0,08149 (2,42)	0,04605 (5,94)	0,05486 (4,158)
β	0,9053 (26,62)	0,9449 (105,27)	0,9347 (67,08)
v	-	5,681 (11,13)	1,259 (21,95)

Źródło: obliczenia własne.

Otrzymano również następujące wartości funkcji LLF:

LLF _N	LLF _S	LLF _G
16 213,05	16 458,15	16 420,90

Ze względu na fakt, że model $N(0,1)$ zawiera się w dwóch pozostałych rozkładach, do wyboru modelu, który lepiej modeluje zadany szereg zastosowano test oparty na wartościach funkcji wiarygodności (*Likelihood Ratio Test*) z następującą statystyką:

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0) \quad (15)$$

gdzie:

LLF_1 - wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z większą liczbą parametrów,

LLF_0 - wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z mniejszą liczbą parametrów.

Statystyka LRT ma rozkład χ^2 z ilością stopni swobody równą różnicy w liczbie parametrów, czyli χ_1^2 (rozkład t-Studenta i GED mają o jeden parametr (liczbę stopni swobody) więcej niż rozkład normalny).

W obu przypadkach test wykazuje, że model z większą ilością parametrów lepiej opisuje zrealizowane stopy zwrotu.

	LRT	wartość krytyczna testu
N-S	490,2	3,841
N-G	415,7	3,841

Źródło: obliczenia własne

Ponieważ modele $t-St(0,1,v)$ i $GED(0,1,v)$ nie zawierają się w sobie nie jest możliwe przeprowadzenia analogicznego testu. Jakość dopasowania tych dwóch modeli do danych empirycznych dokonana została na podstawie dopasowania reszt modelu $\hat{\eta}_t$ (uzyskanych dla westymowanych parametrów modeli) z rozkładami teoretycznymi $t-St(0,1,v)$ i $GED(0,1,v)$. Za v przyjęto wyestymowaną liczbę stopni swobody. Dla porównania przedstawiono również statystyki dla rozkładu normalnego.

Jakość dopasowania badano typowymi testami zgodności rozkładu [14]:

- statystyką Kołmogorowa:

$$K = \max_x k(x) = \max_x |F_e(x) - F(x)| \quad (16)$$

- statystyką Andersona-Darlinga:

$$AD = \max_x ad(x) = \max_x \frac{|F_e(x) - F(x)|}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}} \quad (17)$$

gdzie:

$F_e(x)$ - empiryczna dystrybuanta rozkładu, $F(x)$ - teoretyczna dystrybuanta rozkładu.

Im mniejsze wartości K i AD , tym lepsze dopasowanie badanych rozkładów. Statystykę AD stosuje się, gdyż lepiej bada ona dopasowanie rozkładów w ogonach, co jest w przypadku analizy VaR szczególnie ważne.

Poniższa tabela prezentuje wartości statystyk dla poszczególnych rozkładów. Dodatkowo zaprezentowano wartości $k(x)$ i $ad(x)$ dla x będących odpowiednio pierwszym i piątym percentylem analizowanych rozkładów, co będzie przydatne w dalszej analizie VaR .

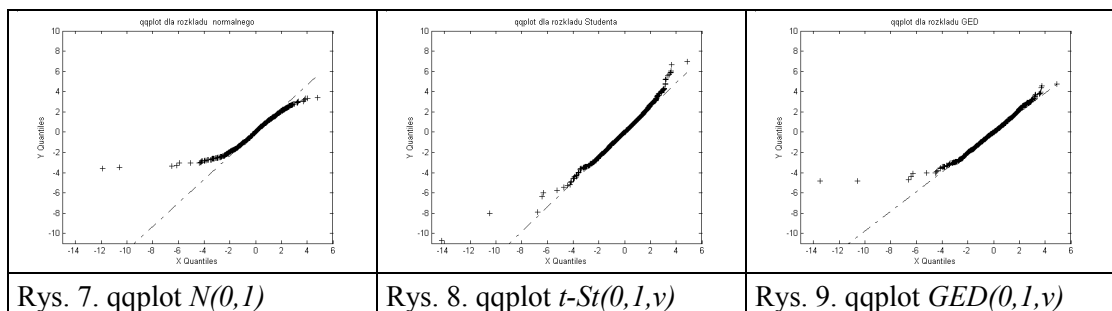
Na podstawie statystyki K i AD można stwierdzić, że model z warunkowym rozkładem t-Studenta lepiej dopasował się do danych (zarówno w okolicy modalnej, jak i w ogonach)

niż rozkład *GED*. Dodatkowo możemy zaobserwować, że daleko w ogonie statystyka *ad* przybiera porównywalne wartości dla rozkładów t-Studenta i GED, natomiast trochę bliżej modalnej, model GED bliższy jest rozkładowi normalnemu. Powyższe wyniki otrzymano na podstawie jednego szeregu danych i należałoby traktować je z odpowiednio „ograniczonym zaufaniem”. Dalsze badania dotyczące miary *VaR* potwierdzają jednak dostrzeżone zależności.

	$N(0,1)$	$t-St(0,1,\nu)$	$GED(0,1,\nu)$
<i>K</i>	0,039711	0,01123	0,015603
<i>AD</i>	0,52906	0,039523	0,058682
<i>k(.) dla 1 percentyla</i>	0,003922	0,0007579	0,000364
<i>k(.) dla 5 percentyla</i>	0,008528	0,0009136	0,005632
<i>ad(.) dla 1 percentyla</i>	0,050460	0,00792	0,003598
<i>ad(.) dla 5 percentyla</i>	0,036320	0,004228	0,02457

Źródło: obliczenia własne.

Rys. 7-9 prezentują wykresy kwanty-kwantyl dla uzyskanych szeregów warunkowych reszt oraz szeregów pochodzących z rozkładu teoretycznego.



Źródło: obliczenia własne.

Także na tych rysunkach można stwierdzić, że model z warunkowym rozkładem normalnym $N(0,1)$ zdecydowanie najgorzej opisuje szereg danych stóp zwrotu.

2. Pomiar ryzyka metodą VaR

Value at Risk to maksymalna kwota, jaką można stracić w wyniku inwestycji w portfel o określonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie istotności [1,8,9].

Powyższą definicję można zapisać w postaci:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha \tag{18}$$

gdzie: W_0 - obecna wartość instrumentu, W - wartość instrumentu na końcu okresu, α - poziom istotności

Nie znając wartości portfela W_0 , nie zmniejszając ogólności rozważań, powyższą zależność można zapisać wykorzystując pojęcie stopy zwrotu:

$$P(r_t \leq F^{-1}(\alpha)) = \alpha \tag{19}$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo, że stopa zwrotu w danym horyzoncie czasu nie przekroczy wartości równej odpowiedniemu kwantylowi rozkładu stóp zwrotu $F^{-1}(\alpha)$, wynosi α . Podejście to wywodzi się ze statycznego zarządzania ryzykiem (*static risk management*), w którym analizujemy jedynie bezwarunkowy rozkład stóp zwrotu. Z takim podejściem kontrastuje dynamiczne zarządzanie ryzykiem (*dynamic risk management*), pozwalające uchwycić takie zależności jak autokorelacje stóp zwrotu i gromadzenie zmienności.

Dla wersji dynamicznej zależność (19) przyjmuje postać:

$$P\left(r_t \leq m_t + \sqrt{h_t} F_{\eta}^{-1}(\alpha)\right) = \alpha \quad (20)$$

gdzie:

m_t - warunkowa oczekiwana stopa zwrotu dla horyzontu w którym liczymy VaR ,

h_t - warunkowa oczekiwana wariancja dla horyzontu, w którym liczymy VaR ,

$F_{\eta}^{-1}(\alpha)$ - kwantyl odpowiadający prawdopodobieństwu α dla warunkowego rozkładu zdefiniowanego wzorami (8)-(11). Dla warunkowego rozkładu $N(0,1)$ dla standardowych poziomów istotności 0,05 oraz 0,01 uzyskujemy następujące wartości kwantyli: $F_{\eta}^{-1}(0,05) = -1,645$ oraz $F_{\eta}^{-1}(0,01) = -2,326$. Dla rozkładu t-Studenta i GED wartości kwantyli zależą od liczby stopni swobody. Przykładowo dla rozkładu t-Studenta i $\nu = 5,81$, $F_{\eta}^{-1}(0,05) = -1,583$ oraz $F_{\eta}^{-1}(0,01) = -2,573$, a dla rozkładu GED i $\nu = 1,259$, $F_{\eta}^{-1}(0,05) = -1,649$ oraz $F_{\eta}^{-1}(0,01) = -2,612$.

Poniżej w tabeli przedstawiono liczbę przekroczeń dziennej wartości VaR dla poszczególnych modeli dla poziomu istotności 0,05 i 0,01. **Dokonano weryfikacji przydatności poszczególnych modeli do szacowania wartości VaR dla szeregu indeksu WIG (stopy zwrotu z okresu 16.04.1991-16.05.2002, 2315 obserwacji), indeksu SP500 (stopy zwrotu z okresu 05.01.1970 – 15.05.2002, 8172 obserwacje) oraz indeksu DJIA (stopy zwrotu z okresu 23.08.1962 – 20.05.2002, 10000 obserwacji).**

Raz w miesiącu (co 22 obserwacje) dokonywano ponownej estymacji modelu na podstawie ostatnich 1000, 2000 lub 5000 obserwacji, a następnie wyznaczano warunkową wariancję oraz warunkową oczekiwaną stopę zwrotu dla kolejnych dni miesiąca, oraz sprawdzano, czy $\left(r_t \leq m_t + F_{\eta}^{-1}(\alpha)\sqrt{h_t}\right)$. Jeśli tak, to w danym dniu strata przekraczała VaR .

Łącznie rozpatrzono po 21 przypadków dla każdego z dwóch podstawowych poziomów istotności VaR (dla szeregu SP500 i DJIA estymacja parametrów na podstawie ostatnich 1000, 2000 lub 5000 obserwacji dla trzech analizowanych rozkładów warunkowych oraz dla szeregu WIG estymacja parametrów na podstawie ostatnich 1000 obserwacji również dla 3 analizowanych rozkładów). We wszystkich analizowanych przypadkach dokonano 5286 estymacji modeli.

			$\alpha = 0,05^{(1)}$			$\alpha = 0,01$		
			zaobser. ⁽²⁾	teoret. ⁽³⁾	przedział ⁽⁴⁾	zaobsr.	teoret.	przedział
SP500	1000	N	357	359	322-394	121	72	55-88
		S	386			83		
		G	355			82		
	2000	N	297	309	275-342	101	62	46-77
		S	320			72		
		G	296			66		
	5000	N	141	159	134-182	53	32	20-42
		S	162			37		
		G	140			36		
DJIA	1000	N	450	450	409-490	136	90	71-108
		S	480			104		
		G	447			101		
	2000	N	396	400	361-438	120	80	62-97
		S	430			88		
		G	390			88		
	5000	N	222	250	219-280	75	50	36-64
		S	232			51		
		G	222			50		
WIG	1000	N	68	66	50-81	24	13	6-20
		S	72			15		
		G	67			15		

Źródło: obliczenia własne.

gdzie:

- (1) poziom istotności VaR ,
- (2) ilość zaobserwowanych przekroczeń VaR w szeregu,
- (3) ilość teoretycznych przekroczeń przy zadanym poziomie istotności i długości szeregu,
- (4) ilość przekroczeń wyznaczająca obszar niekrytyczny (przyjęcia hipotezy o poprawności modelu VaR) dla poziomu istotności testu 0,05.

Pozostaje jeszcze etap oceny poszczególnych modeli. Testowanie wsteczne modelu (*backtesting*) jest niezbędną procedurą, aby stwierdzić, czy można stosować dany model. Najprostszym testem jest test ilości przekroczeń (*failure test*). Dla danej wielkości próby teoretyczna liczba przekroczeń ma rozkład dwumianowy. Odpowiednią statystykę testową zaproponował w 1995 roku Kupiec. Ma ona postać:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[(1-p)^{T-N} p^N \right] + 2 \ln \left\{ \left[1 - \left(\frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] \left(\frac{N}{T} \right)^N \right\} \quad (21)$$

gdzie: N – ilość przekroczeń VaR , T – długość próby testowej, p – poziom istotności VaR . Statystyka LR_{uc} ma rozkład χ^2 z jednym punktem swobody. W powyższej tabeli na podstawie testu ilości przekroczeń zaprezentowane zostały przedziały niekrytyczne ilości

przekroczeń. Na tej podstawie odrzucone zostały wszystkie modele *VaR* dla poziomu istotności 0,01 i dla warunkowego rozkładu normalnego.

Test ilości przekroczeń nie jest jedynym testem, któremu należy poddać weryfikowany model. Do testu na ilość przekroczeń należy dołączyć test, czy przekroczenia są niezależne w czasie. Największą popularność zdobył test niezależności przekroczeń Kupca LR_{ind} oparty na dwóch testach – teście do pierwszego przekroczenia (*Time until First Failure Test*) oraz teście czasu pomiędzy kolejnymi przekroczeniami (*Time between Failures Test*) [9,10]. Dla analizowanych modeli, które nie zostały odrzucone podczas testu ilości przekroczeń, nie było również podstaw do odrzucenia ze względu na test niezależności przekroczeń.

Podsumowanie

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że dla poziomu istotności *VaR* 0.05 w zupełności wystarczające jest modelowanie szeregów stóp zwrotu przy pomocy modeli AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym bądź z równie dobrym rozkładem GED. Model z warunkowym rozkładem t-Studenta w sposób systematyczny niedoszacowuje ryzyko i liczba pojawiających się przekroczeń jest większa od oczekiwanej. Pozornie przeczy to znanej własności, że rozkład t-Studenta posiada grubsze ogony od rozkładu normalnego. Należy jednak pamiętać, że rozpatrujemy odpowiednio przekształcony rozkład t-Studenta o jednostkowej wariancji.

Efekt grubego ogona rozkładu t-Studenta ujawnia się dopiero przy poziomie istotności *VaR* równym 0.01. Przy tym poziomie istotności warunkowy rozkład normalny nie sprawdza się już zaniżając znacznie w sposób systematyczny ryzyko, natomiast dużo lepsze wyniki osiąga się dla rozkładu GED i t-Studenta. Ogólnie można zauważyć, że rozkład GED jest praktycznie tak samo dobry jak rozkład normalny dla poziomu istotności 0.05 oraz tak samo dobry jak rozkład t-Studenta dla poziomu istotności 0.01.

Jednak także w przypadku poziomu istotności 0,01 ogony rozkładów t-Studenta i GED nie są wystarczająco grube, gdyż liczba przekroczeń jest większa od oczekiwanej.

Poprawy uzyskanych efektów można oczekiwać jeśli uwzględni się dodatkowo skośność rozkładów warunkowych (np. poprzez zastosowanie skośnego rozkładu t-Studenta) lub poprzez zaniechanie modelowania całości rozkładu warunkowego na rzecz jedynie jego ogonów. Podejście takie zaprezentowane zostało w pracy [11], gdzie połączono teorię modele heteroskedastycznych z teorią zdarzeń ekstremalnych.

Literatura:

1. Best P. (2000). Wartość narażona na ryzyko. Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
2. Bollerslev T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 31.
3. G. Box, J. Jenkins. (1983). Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
4. Engle R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance od UK Inflation. *Econometrica*. 50.
5. Giot P., Laurent S. (2001) Modelling Daily VaR Using Realized Volatility and ARCH Type Models. Maastricht University

6. Hafner C., Herwartz. (1998). Testing for Linear Autoregressive Dynamics under Heteroskedasticity, Humboldt-Universitaet. Berlin
1. Jajuga K. (1999). Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym. Rynek Terminowy 3
8. Jajuga K. (2000). Miary ryzyka rynkowego – część III. Miary zagrożenia. Rynek Terminowy 8/00.
9. Jorion P. (2001). Value at Risk 2nd edition. McGraw-Hill
10. Hass M. (2001). New Methods in Backtesting. Financial Engineering Research Center. Bonn.
11. McNeil A., R. Frey. (2000). Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroskedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, Department Mathematik, ETH Zentrum, Zurich.
12. Piontek K. (2001). Heteroskedastyczność szeregu stóp zwrotu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR. Ustroń.
13. Welfe A. (1995). Ekonometria. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa
14. Weron A., Weron R. (1999). Inżynieria finansowa. WNT. Warszawa